О точности приближения спектра GOE полукруговым законом*

Д. А. Тимушев[1], А. Н. Тихомиров[2], А. А. Холопов[1]

[1] *Математический факультет*
Сыктывкарский государственный университет
[2] *Математико-механический факультет*
Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация

Показано, что расстояние Колмогорова между ожидаемой спектральной функцией распределения $n \times n$ случайной матрицы из гауссовского ортогонального ансамбля и функцией распределения полукругового закона имеет порядок $O(n^{-1})$.

Ключевые слова и фразы: случайная матрица, полукруговой закон, функция Эрмита, гауссовский ансамбль.

Пусть A эрмитова случайная матрица порядка n, $\lambda_j^{(n)}(\omega)$, $j = 1, \dots, n$, – собственные числа матрицы $\frac{1}{\sqrt{n}}A$. Пусть $F_n(x) = \frac{1}{n}\#\{j : \lambda_j^{(n)}(\omega) < x\}$ спектральная функция матрицы $\frac{1}{\sqrt{n}}A$.

Известно, что ожидаемая спектральная функция $\mathbf{E}\, F_n(x)$ для широкого класса эрмитовых матриц при $n \to \infty$ стремится к функции распределения полукругового закона (см. [8]). Скорость сходимости оценивалась в работах многих авторов (см. [1, 3, 4, 5] и литературу к ним). В [5] получена оптимальная оценка $O(n^{-1})$ скорости сходимости для комплекснозначных матриц A из гауссовского унитарного ансамбля (GUE). По определению GUE (см. [8]), $\sqrt{2}\,\mathrm{Re} A_{kl}, \sqrt{2}\,\mathrm{Im} A_{kl}, A_{kk}, A_{ll}$ при $1 \leqslant k < l \leqslant n$ независимы в совокупности и распределены нормально со средним 0 и дисперсией σ^2. Пусть $F_{n,2}(x)$ нормированная спектральная функция матрицы A из GUE с параметром $\sigma^2 = 1$. В работе [5, теорема 1.1] получена оценка

$$\Delta_{n,2} := \sup_x |\mathbf{E}\, F_{n,2}(x) - G(x)| \leqslant Cn^{-1}, \tag{1}$$

*Работа поддержана грантом РФФИ 02–01–00233, грантом DFG-Forshergruppe FOR 399/1, совместным грантом РФФИ и ННИО 04–01–04000, и грантом НШ-4222.2006.1.

где $G(x)$ - функция распределения полукругового закона с плотностью

$$g(x) = G'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\sqrt{2-x^2} & \text{при} \quad |x| < \sqrt{2}, \\ 0 & \text{при} \quad |x| > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Здесь и далее через C обозначены различные положительные константы, не зависящие от n, x.

Рассмотрим вещественную матрицу A из гауссовского ортогонального ансамбля (GOE). По определению GOE, элементы $\sqrt{2}A_{kl}, A_{kk}, A_{ll}$ при $1 \leqslant k < l \leqslant n$ являются гауссовскими независимыми величинами со средним 0 и дисперсией σ^2. Пусть $F_{n,1}(x)$ – нормированная спектральная функция матрицы A из GOE при $\sigma^2 = 1$. Нас будет интересовать скорость сходимости ожидаемой спектральной функции распределения $\mathbf{E}F_{n,1}(x)$ к функции распределения полукругового закона $G(x)$ в метрике Колмогорова, то есть величина

$$\Delta_{n,1} := \sup_x |\mathbf{E}\, F_{n,1}(x) - G(x)|.$$

В случае гауссовских ансамблей (GUE, GOE), Форрестер, Франкель и Гарони (см. [2], а также [7]) разработали метод, позволяющий получить для плотности ожидаемой спектральной функции распределения $\mathbf{E}\, F_{n,1}(x)$ асимптотические разложения любых порядков. Остаточный член полученного асимтотического разложения возможно выписать только при фиксированных значениях переменной x, что не дает возможности получать оценки величины $\Delta_{n,1}$ простым интегрированием.

В данной работе доказывается оценка, аналогичная (1) и для $F_{n,1}(x)$.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\Delta_{n,1} \leqslant Cn^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство. Для произвольного $C > 0$ введем интервал

$$\mathbf{I} = [-\sqrt{2} + Cn^{-2/3}, \sqrt{2} - Cn^{-2/3}].$$

Заметим, что

$$\sup_x |EF_{n,1}(x) - G(x)| \leqslant \sup_{x \in \mathbf{I}} |EF_{n,1}(x) - G(x)| + G(-\sqrt{2} + Cn^{-2/3}).$$

Принимая во внимание очевидное неравенство

$$G(-\sqrt{2} + Cn^{-2/3}) \leqslant Cn^{-1},$$

а также оценку (1), получим

$$\sup_x |\mathbf{E}\, F_{n,1}(x) - G(x)| \leqslant \sup_{x\in\mathbf{I}} |\mathbf{E}\, F_{n,1}(x) - \mathbf{E}\, F_{n,2}(x)| + Cn^{-1}.$$

Таким образом, для доказательства (2) достаточно установить оценку

$$|\mathbf{E}\, F_{n,1}(x) - \mathbf{E}\, F_{n,2}(x)| \leqslant \frac{C}{n}, \quad \text{при} \;\; x \in \mathbf{I}. \tag{3}$$

В случае ансамблей GUE, GOE для $\mathbf{E}\, F_{N,1}(x), \mathbf{E}\, F_{N,2}(x)$ известны точные аналитические выражения. Пусть $H_n(x) = e^{x^2}(-\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}, n = 1, 2, \ldots$ – полиномы Эрмита, $\varphi_n(x) = c_n e^{-x^2/2} H_n(x)$ – функции Эрмита,

$$c_n = (2^n n!\, \pi^{1/2})^{-1/2}.$$

Обозначим через $\sigma_{n,1}, \sigma_{n,2}$ плотности распределений $\mathbf{E}\, F_{n,1}, \mathbf{E}\, F_{n,2}$ соответственно. Тогда из формул (5.2.16), (6.3.2), (6.3.5), (6.4.3) работы [8] после соответствующей нормировки следует

$$\sigma_{n,2}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_k^2(\sqrt{n}x),$$

$$\sigma_{n,1}(x) = \sigma_{n,2}(x) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \varphi_{n-1}(\sqrt{n}x) \left[\int_{-\infty}^{\sqrt{n}x} \varphi_n(t)dt - \int_{\sqrt{n}x}^{\infty} \varphi_n(t)dt \right] + \frac{1}{\sqrt{n}} \alpha_n(\sqrt{n}x), \tag{4}$$

$$\alpha_n(s) = \begin{cases} \varphi_{2m}(s)(2I_{2m})^{-1} & \text{при} \;\; n = 2m+1, \\ 0 & \text{при} \;\; n = 2m, \end{cases} \tag{5}$$

$$I_n = \int_0^\infty \varphi_n(t)dt. \tag{6}$$

Функции $\sigma_{n,1}, \sigma_{n,2}$ (как и плотность g полукругового закона) являются четными функциями, поэтому в (3) достаточно ограничиться случаем $x > 0$.

Оценим функцию $\delta_n(x) \equiv \mathbf{E}\, F_{n,1}(x) - \mathbf{E}\, F_{n,2}(x) = \int_0^x [\sigma_{n,1}(s) - \sigma_{n,2}(s)]\, ds$ по формулам (4) – (6) в области

$$0 < x < \sqrt{2} - Cn^{-2/3}. \tag{7}$$

Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного n.

а) **Случай $\mathbf{n = 2m}$.** С учетом четности φ_{2m} получаем из (4) – (5)

$$\int_{-\infty}^{\sqrt{2m}x} \varphi_{2m}(t)dt - \int_{\sqrt{2m}x}^{\infty} \varphi_{2m}(t)dt = 2\int_0^{\sqrt{2m}x} \varphi_{2m}(t)dt,$$

$$\delta_{2m}(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} \varphi_{2m-1}(s)\Big(\int_0^s \varphi_{2m}(t)dt\Big)ds. \tag{8}$$

Для оценки интегралов воспользуемся асимптотикой для функций $\varphi_n(t)$ из работы [9]. В области

$$|t| \leqslant (2n+1)^{1/2} - (2n+1)^{-1/6} \tag{9}$$

при $n \to \infty$ справедливо равенство

$$\varphi_n(t) = A_n(t) + R_n(t), \tag{10}$$

где

$$A_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2n+1-t^2)^{-1/4} \cos\frac{(2n+1)(2\beta - \sin 2\beta) - \pi}{4}, \tag{11}$$

$$R_n(t) = O[(2n+1)^{1/2}(2n+1-t^2)^{-7/4}], \tag{12}$$

$$\beta = \beta_n(t) = \arccos t(2n+1)^{-1/2}.$$

Условие (9) для представления в виде (10) функций $\varphi_n(t)$ и $\varphi_n(s)$ в интеграле (8) выполнено, так как $0 < t \leqslant s \leqslant \sqrt{n}x < \sqrt{n}(\sqrt{2} - Cn^{-2/3}) < (2n-1)^{1/2} - (2n-1)^{-1/6}$ при достаточно больших n и C в области (7).

Представим подынтегральные функции (8) в виде (10) и запишем $\delta_{2m}(x)$ в виде суммы четырех двойных интегралов: $\delta_{2m}(x) = \delta_{2m}^{(1)}(x) + \delta_{2m}^{(2)}(x) + \delta_{2m}^{(3)}(x) + \delta_{2m}^{(4)}(x)$. Оценим отдельно $\delta_{2m}^{(k)}$, опуская константы, не зависящие от m. Из определения (12) и (7) получаем

$$\begin{aligned}
\delta_{2m}^{(4)}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_0^{\sqrt{2m}x} R_{2m-1}(s)\left(\int\limits_0^s R_{2m}(t)\,dt\right)ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_0^{\sqrt{2m}x} O\left[\frac{(4m-1)^{1/2}}{(4m-1-s^2)^{7/4}}\right]\left(\int\limits_0^s O\left[\frac{(4m+1)^{1/2}}{(4m+1-t^2)^{7/4}}\right]dt\right)ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_0^{\sqrt{2m}x} O\left[\frac{(4m-1)^{1/2}}{(4m-1-s^2)^{7/4}(4m+1-t^2)^{3/4}}\right]ds \\
&= \frac{1}{2\sqrt{m}}\, O\left[(4m-1-2mx^2)^{-3/2}\right] = O\left[m^{-2}(2-x^2)^{-3/2}\right].
\end{aligned}$$

Для оценки остальных интегралов $\delta_{2m}^{(k)}$, $k=1,2,3$, докажем лемму.

Лемма 1. *Справедливо неравенство:*

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}x} A_{n-1}(s)\Big(\int\limits_0^s A_n(t)\,dt\Big)\,ds = O\left[\frac{1}{\sqrt{n}}\right].$$

Доказательство Леммы 1. Введем следующие обозначения:

$$q_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(2n+1-t^2)^{-1/4}, \qquad p_n(t) = \frac{(2n+1)(2\beta-\sin 2\beta)-\pi}{4},$$
$$I_n(s) = \int\limits_0^s q_n(t)\cos p_n(t)\,dt. \tag{13}$$

Легко проверить, что

$$q_n'(t) = \frac{t}{\sqrt{2\pi}}\,(2n+1-t^2)^{-5/4}, \qquad p_n'(t) = -\sqrt{2n+1-t^2},$$
$$I_n'(s) = q_n(s)\cos p_n(s).$$

Интегрируя $I_n(s)$ по частям, получим

$$I_n(s) = \frac{q_n(t)}{p_n'(t)}\,\sin p_n(t)\Big|_0^s + \int\limits_0^s \frac{q_n(t)p_n''(t)}{p_n'^2(t)}\,\sin p_n(t)\,dt - \int\limits_0^s \frac{q_n'(t)}{p_n'(t)}\,\sin p_n(t)\,dt.$$

Отсюда, имеем неравенство

$$|I_n(s)| \leqslant \int\limits_0^s \frac{q_n(t)p_n''(t)}{p_n'^2(t)}\,dt - \frac{q_n(s)}{p_n'(s)} - \frac{q_n(0)}{p_n'(0)} - \int\limits_0^s \frac{q_n'(t)}{p_n'(t)}\,dt \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}2(2n+1-s^2)^{-3/4}. \tag{14}$$

Пользуясь последним неравенством и обозначениями (13), интегрируя по частям, мы получим

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}x} A_{n-1}(s)\Big(\int\limits_0^s A_n(t)\,dt\Big)\,ds = \int\limits_0^{\sqrt{n}x} I_n(s)\,q_{n-1}(s)\,\cos p_{n-1}(s)\,ds$$

$$= I_n(s)\,\frac{q_{n-1}(s)}{p_{n-1}'(s)}\,\sin p_{n-1}(s)\Big|_0^{\sqrt{n}x} + \int\limits_0^{\sqrt{n}x} I_n(s)\frac{q_{n-1}(s)p_{n-1}''(s)}{p_{n-1}'^2(s)}\,\sin p_{n-1}(s)\,ds$$

$$- \int\limits_0^{\sqrt{n}x} I_n(s) \frac{q'_{n-1}(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s)\, ds - \int\limits_0^{\sqrt{n}x} I'_n(s) \frac{q_{n-1}(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s)\, ds$$

$$= O\left[n^{-3/2}(2-x^2)^{-3/2}\right] - \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s)\, q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s) \cos p_n(s)\, ds.$$

Для оценки последнего интеграла представим его в виде

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s)\, q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin p_{n-1}(s) \cos p_n(s)\, ds$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s)\, q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin(p_n(s) + p_{n-1}(s))\, ds$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s)\, q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin(p_n(s) - p_{n-1}(s))\, ds.$$

Интегрируя по частям, легко убедиться, что

$$\int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s)\, q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin(p_n(s) + p_{n-1}(s))\, ds = O\left[n^{-3/2}(2-x^2)^{-3/2}\right].$$

Заметим, что $0 < \beta_n(s) \leqslant \pi/2$, при $0 < s \leqslant \sqrt{n}x$. Используя этот факт, а также очевидное тождество

$$\sin 2\beta_n - \sin 2\beta_{n-1} = \sin\left(2\beta_n - 2\beta_{n-1}\right) - 4 \sin\beta_n \sin\beta_{n-1} \sin\left(\beta_n - \beta_{n-1}\right),$$

мы получим

$$\left| \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{q_{n-1}(s)\, q_n(s)}{p'_{n-1}(s)} \sin(p_n(s) - p_{n-1}(s))\, ds \right| \leqslant C \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{|p_n(s) - p_{n-1}(s)|}{2n - s^2}\, ds$$

$$\leqslant C \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{2\beta_n(s) - \sin 2\beta_n(s)}{2n - s^2}\, ds$$

$$+ Cn \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{2\beta_n(s) - 2\beta_{n-1}(s) - \sin(2\beta_n(s) - 2\beta_{n-1}(s))}{2n - s^2}\, ds$$

$$+ Cn \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{\sin\beta_n(s)\sin\beta_{n-1}(s)\sin(\beta_n(s) - \beta_{n-1}(s))}{2n - s^2}\, ds$$

$$\leqslant C \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{\sin^3\beta_n(s)}{2n - s^2}\, ds + Cn \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{\sin^3(\beta_n(s) - \beta_{n-1}(s))}{2n - s^2}\, ds$$

$$+ Cn \int\limits_0^{\sqrt{n}x} \frac{\sin\beta_n(s)\sin\beta_{n-1}(s)\sin(\beta_n(s) - \beta_{n-1}(s))}{2n - s^2}\, ds \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Лемма 1 доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. Непосредственно из леммы 1 имеем

$$\delta_{2m}^{(1)}(x) = \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_0^{\sqrt{2m}x} A_{2m-1}(s)\left(\int\limits_0^s A_{2m}(t)\, dt\right) ds = O\left[\frac{1}{m}\right].$$

Используя оценку (14) леммы 1 и определение (12), получаем

$$\begin{aligned}
\delta_{2m}^{(3)}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} R_{2m-1}(s)\left(\int_0^s A_{2m}(t)\, dt\right) ds = \\
&= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int_0^{\sqrt{2m}x} O\left[\frac{(4m-1)^{1/2}}{(4m-1-s^2)^{7/4}}\right] \cdot O\left[\frac{1}{(4m+1-s^2)^{3/4}}\right] ds \\
&= O\left[\frac{1}{m^2(2-x^2)^{3/2}}\right].
\end{aligned}$$

Аналогично, после изменения порядка интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}
\delta_{2m}^{(2)}(x) &= \frac{1}{2\sqrt{m}} \int\limits_0^{\sqrt{2m}x} A_{2m-1}(s)\left(\int\limits_0^s R_{2m}(t)\, dt\right) ds \\
&= \int\limits_0^{\sqrt{2m}x} R_{2m}(t)\left(\int\limits_t^{\sqrt{2m}x} A_{2m-1}(s)\, ds\right) dt = O\left[\frac{1}{m^2(2-x^2)^{3/2}}\right].
\end{aligned}$$

Из оценок для $\delta_{2m}^{(k)}(x)$, полученных выше, в области (7) следует оценка $\delta_{2m}(x) = O\,[m^{-1}]$. Поэтому (3) выполнено и, тем самым, теорема для четного n доказана.

b) **Случай $\mathbf{n = 2m + 1}$.** С учетом нечетности φ_{2m+1} из (4) – (5) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m+1}(t)\,dt - \int\limits_{\sqrt{2m+1}x}^{\infty} \varphi_{2m+1}(t)\,dt = 2\int\limits_{0}^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m+1}(t)\,dt\ - 2\,I_{2m+1},$$

$$\delta_{2m+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{4m+2}} \int\limits_{0}^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(s)\left(\int\limits_{0}^{s} \varphi_{2m+1}(t)dt\right)ds + k_m \int\limits_{0}^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(t)\,dt\,, \tag{15}$$

где I_n – интегралы (6) ,

$$k_m = \frac{1}{2(2m+1)I_{2m}} - \frac{I_{2m+1}}{\sqrt{4m+2}}\,. \tag{16}$$

Первое слагаемое (15) оценивается так же, как и в случае четного n. Рассмотрим второе слагаемое. Из (10) - (12) и оценки (14) леммы 1 получаем

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(t)\,dt = O\left[m^{-3/4}(2-x^2)^{-3/4}\right]\,. \tag{17}$$

Для оценки константы k_m докажем лемму

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$I_n = O(n^{-1/4}). \tag{18}$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи четного и нечетного n. В случае четного $n = 2m$, пользуясь равенством [6, 7.373.2], получим

$$I_{2m} = \int\limits_{0}^{\infty} \varphi_{2m}(t)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,c_{2m}\frac{(2m)!}{m!},$$

откуда, пользуясь формулой Стирлинга, будем иметь

$$I_{2m} = O(m^{-1/4}).$$

Рассмотрим случай нечетного $n = 2m+1$. Принимая во внимание равенство
$$H_{2m+1}(t) = 2tH_{2m}(t) - 4mH_{2m-1}(t),$$
интегрированием по частям получаем рекуррентное соотношение
$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m+1}(t)\,dt = H_{2m}(0) + 4m\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m-1}(t)\,dt.$$
Отсюда
$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m+1}(t)\,dt = \sum_{k=0}^m 2^{n-k+1} H_{2k}(0)\,\frac{(2n)!!}{(2k)!!}.$$
Замечая, что
$$H_{2k}(0) = (-1)^k\,2^k\,(2k-1)!!,$$
получим
$$\int\limits_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} H_{2m+1}(t)\,dt = 2^{2m+1}\,m!\sum_{k=0}^m (-1)^k\,\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.$$
Так как сумма в последнем равенстве не превосходит 1, а $c_{2m+1}2^{2m+1}m! = O(m^{-1/4})$, имеем
$$I_{2m+1} = O(m^{-1/4}).$$
Лемма 2 доказана. $\square$

Закончим доказательство теоремы. Используя оценку (18), получаем из (16) равенство $k_m = O(m^{-3/4})$. Вместе с (17) это дает нужную оценку второго слагаемого в (15)
$$k_m\int\limits_0^{\sqrt{2m+1}x} \varphi_{2m}(t)\,dt = O\big[m^{-3/4}\big]\cdot O\big[m^{-3/4}(2-x^2)^{-3/4}\big] = O\big[m^{-3/2}(2-x^2)^{-3/4}\big].$$
Нетрудно убедиться, что обе оценки для слагаемых (15) являются $O\left[m^{-1}\right]$ в области (7), поэтому (3) выполнено и при нечетном n. Теорема доказана. $\square$

Список литературы

[1] Z. D. Bai. Methodologies in spectral analysis of large-dimensional random matrices, a review. *Statist. Sinica*, 9(3):611–677, 1999. With comments by G. J. Rodgers and Jack W. Silverstein; and a rejoinder by the author.

[2] T. M. Garoni, P. J. Forrester, and N. E. Frankel. Asymptotic corrections to the eigenvalue density of the GUE and LUE. *J. Math. Phys.*, 46(10):103301, 17, 2005.

[3] F. Götze and A. Tikhomirov. Rate of convergence to the semi-circular law. *Probab. Theory Related Fields*, 127(2):228–276, 2003.

[4] F. Götze and A. N. Tikhomirov. Rate of convergence to the semi-circular law for the Gaussian unitary ensemble. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 47(2):381–387, 2002.

[5] Friedrich Götze and Alexander Tikhomirov. The rate of convergence for spectra of GUE and LUE matrix ensembles. *Cent. Eur. J. Math.*, 3(4):666–704 (electronic), 2005.

[6] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products.* Academic Press Inc., San Diego, CA, sixth edition, 2000. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger.

[7] Frieder Kalisch and Daniel Braak. Exact density of states for finite Gaussian random matrix ensembles via supersymmetry. *J. Phys. A*, 35(47):9957–9969, 2002.

[8] Madan Lal Mehta. *Random matrices*, volume 142 of *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam).* Elsevier/Academic Press, Amsterdam, third edition, 2004.

[9] Benjamin Muckenhoupt. Mean convergence of Hermite and Laguerre series. I, II. *Trans. Amer. Math. Soc. 147 (1970), 419-431; ibid.*, 147:433–460, 1970.