О скорости сходимости по вероятности спектральной функции распределения случайной матрицы*

Тимушев Д. А.
Сыктывкарский государственный университет
Математический факультет

Аннотация

Показано, что расстояние Колмогорова между спектральной функцией распределения $n \times n$ матрицы из GUE и функцией распределения полукругового закона имеет стохастический порядок $\mathcal{O}_p\left(\frac{\ln n}{n^{2/3}}\right)$.

Рассмотрим вигнеровскую эрмитову случайную матрицу $\mathbf{W} = (w_{jk})$ размерности $n \times n$. По определению ансамбля Вигнера, элементы w_{kj}, $1 \leqslant k \leqslant j \leqslant n$ являются независимыми одинаково распределенными комплексными случайными величинами, с независимыми мнимыми и вещественными частями, причем $\mathbf{E}\, w_{kj} = 0$ и $\mathbf{E}\,|w_{kj}|^2 = \sigma^2$. Обозначим через λ_j, $1 \leqslant j \leqslant n$ собственные числа матрицы $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{W}$, а через $F_n(x) = \dfrac{1}{n}\#\{j : \lambda_j \leqslant x\}$ — спектральную функцию распределения матрицы $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{W}$. Пусть $G(x)$ — функция распределения полукругового закона с плотностью

$$G'(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\sqrt{4\sigma^2 - x^2}\,\mathbf{I}_{\{|x| \leqslant 2\sigma\}}.$$

Нас будет интересовать скорость сходимости спектральной функции $F_n(x)$ к функции распределения $G(x)$ в метрике Колмогорова, а также в метриках пространств L_1 и L_2, то есть величины:

$$\Delta_n^* := \sup_x |F_n(x) - G(x)|\,,$$

$$L_p(F_n, G) := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x) - G(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \qquad p = 1, 2.$$

*Работа выполнена при поддержке DFG-Forshergruppe FOR 399/1 и SFB 701 Universität Bielefeld.

Скорость сходимости к полукруговому закону оценивалась в работах многих авторов (см., например, [2, 3, 4, 5] и литературу к ним). В [3], в частности, показано, что для вигнеровских матриц, четвертые моменты элементов которых равномерно ограничены, имеет место оценка $\Delta_n := \sup_x |\mathbf{E}\, F_n(x) - G(x)| = \mathcal{O}(n^{-1/2})$ для скорости сходимости ожидаемой спектральной функции $\mathbf{E}\, F_n(x)$ к функции распределения $G(x)$. А при равномерной ограниченности двенадцатых моментов, аналогичная оценка $\mathbf{E}\, \Delta_n^* = \mathcal{O}(n^{-1/2})$ показана для сходимости по вероятности спектральной функции $F_n(x)$ к функции распределения $G(x)$. В данной работе мы рассматриваем более узкий, чем вигнеровский, класс матриц — гауссовский унитарный ансамбль (GUE). Это вигнеровские матрицы, элементы которых w_{jk} имеют гауссовское распределение. В этом случае известно точное аналитическое представление совместной плотности распределения собственных чисел и, как следствие, плотности ожидаемой спектральной функции $(\mathbf{E}\, F_n(x))'$ через функции Эрмита, что позволяет воспользоваться при оценивании скорости сходимости соответствующей асимптотикой. Сходимость ожидаемой спектральной функции матриц из GUE исследовалась в работе [5], где была получена оптимальная оценка $\Delta_n = \mathcal{O}(n^{-1})$. В то же время, для сходимости по вероятности известен лишь общий результат, упомянутый выше. В этой работе нами получен более точный результат.

Для удобства мы будем полагать $\sigma^2 = 1/4$. Символ C, с индексом или без него, на протяжении всей работы будет обозначать абсолютные положительные константы, необязательно одни и те же в разных формулах. Имеет место следующая

Теорема 1. *Существует положительная константа C, такая что*

$$\mathbf{E}\, L_p(F_n, G) \leqslant C\frac{\sqrt{\ln n}}{n}, \qquad p = 1, 2, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}\, \Delta_n^* \leqslant C\frac{\ln n}{n^{2/3}} \tag{2}$$

Доказательство. Мы начнем с доказательства соотношения (1). Положим $\varepsilon_n = Cn^{-2/3}$. Из показанного в работе [5] неравенства

$$\sup_{-1+\varepsilon_n \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon_n} |\mathbf{E}\, F_n(x) - G(x)| \leqslant Cn^{-1}, \tag{3}$$

и из конечности носителя плотности полукругового закона $G'(x)$ следует, что

$$\mathbf{E}\, L_p(\mathbf{E}\, F_n, G) \leqslant \frac{C}{n}, \qquad p = 1, 2.$$

Поэтому нам достаточно оценить величины $\mathbf{E}\, L_p(\mathbf{E}\, F_n, F_n)$, $p = 1, 2$. Рассмотрим сначала случай $p = 2$.
Пусть $K_n(s,t) = (n/2)^{1/2}(\varphi_n(s)\,\varphi_{n-1}(t) - \varphi_{n-1}(s)\,\varphi_n(t))/(s-t)$ обозначает ядро Кристоффеля-Дарбу, $p_n(s) = (2/n)^{1/2} K_n\left(\sqrt{2n}\,s, \sqrt{2n}\,s\right)$ — плотность ожидаемой спектральной функции распределения $\mathbf{E}\, F_n(x)$ (см. [6]). Здесь $\{\varphi_i\}$ обозначают функции Эрмита. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Несложно проверить, что

$$\mathbf{E}\,(F_n(x) - \mathbf{E}\, F_n(x))^2 = \frac{2}{n} \int_{-\infty}^{x} \int_{x}^{\infty} K_n^2\left(\sqrt{2n}\,s, \sqrt{2n}\,t\right) ds\, dt.$$

Таким образом, нам достаточно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} \int_{x}^{\infty} K_n^2\left(\sqrt{2n}\,s, \sqrt{2n}\,t\right) dt\, ds\, dx = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Для этого воспользуемся асимптотикой Планшереля-Ротача для функций Эрмита (см., например, [1], стр. 700), которая может быть представлена в виде следующей ниже таблицы.

s	$\varphi_n(\sqrt{2n}s)$
$-1+\varepsilon_n \leqslant s \leqslant 1-\varepsilon_n$	$\mathcal{O}(n^{-1/4}(1-s^2)^{-1/4})$
$1-\varepsilon_n \leqslant s \leqslant 1+\varepsilon_n$	$\mathcal{O}(n^{-1/12})$
$1+\varepsilon_n \leqslant s \leqslant \sqrt{2}$	$\mathcal{O}(n^{-1/4}(s-1)^{-1/4}e^{-Cn(s-1)^{3/2}})$
$s \geqslant \sqrt{2}$	$\mathcal{O}(e^{-Cns^2})$

Пользуясь данной асимптотикой и неравенством (3), получим требуемое.

Перейдем к доказательству соотношения (1) при $p = 1$.
Легко убедиться, что

$$\mathbf{E}\, L_1(F_n, \mathbf{E}\, F_n) \leqslant 2\mathbf{E}\, L_2(F_n, \mathbf{E}\, F_n) + 2\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \big(1 - \mathbf{E}\, F_n(x)\big)\, dx$$
$$+ 2\int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \mathbf{E}\, F_n(x)\, dx \leqslant 4 \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x} p_n(s)\, ds\, dx + C\,\frac{\sqrt{\ln n}}{n}.$$

Последнее неравенство является следствием (1) при $p = 2$. Из асимптотики функций Эрмита заключаем, что

$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x} p_n(s)\, ds\, dx \leqslant C\sqrt{n} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-Cns^2}\, ds\, dx \leqslant \frac{C}{n\sqrt{n}}\, e^{-Cn}.$$

Тем самым доказательство соотношения (1) завершено.

Покажем теперь справедливость (2).

Обозначим через $t_n(z)$ и $s(z)$ преобразования Стилтьеса спектральной функции распределения $F_n(x)$ и функции распределения полукругового закона $G(x)$, соответственно. Тогда

$$s(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-z} dG(x) = -2z + 2\sqrt{z^2-1}, \quad t_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x-z} dF_n(x).$$

Введем обозначения $\delta_s t_n(u,v) := t_n(u+iv) - s(u+iv)$, $\delta_E t_n(u,v) := t_n(u+iv) - \mathbf{E}\, t_n(u+iv)$. Пусть v и a — положительные числа, $x' = x + va$. Следуя работе [3] можно показать, что найдутся положительные константы C_1, C_2, C_3, C_4, $C_5(a)$ такие, что для всех $V > v$, и всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$|F_n(x) - G(x)| \leqslant C_1 A_1 + C_2 A_2(x') + C_3 A_3 + C_4 \Delta_n + C_5(a) v,$$

где

$$A_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\delta_s t_n(u,V)|\, du, \quad A_2(x') = \left| \int\limits_{v}^{V} \delta_s t_n(x',u) du \right|,$$

$$A_3 = \frac{1}{\sqrt{v}} L_2(F_n, \mathbf{E}\, F_n).$$

Введем в рассмотрение величины

$$x_k = -1 + 2k/n, \qquad x'_k = x_k + va, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Тогда

$$\mathbf{E}\, \Delta_n^* \leqslant C_1 \mathbf{E}\, A_1 + C_2 \mathbf{E} \max_{0 \leqslant k \leqslant n} A_2(x'_k) + C_3 \mathbf{E}\, A_3 + C_4 \Delta_n + C_5(a) v + C n^{-1}.$$

Далее мы будем полагать, что $V = 1$ и $v = C n^{-2/3}$.

Легко заметить, что соотношение (1), при $p = 2$, влечет оценку $\mathbf{E}\, A_3 = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^{2/3}}\right)$. Из работы ([3], (4.30)) следует неравенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}\, \delta_s t_n(u,V)|\, du \leqslant \frac{C}{n},$$

что, вместе с соотношением (1), при $p = 1$, дает $\mathbf{E}\, A_1 = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)$. Таким образом, для завершения доказательства (2) нам остается показать оценку

$$\mathbf{E} \max_{0 \leqslant k \leqslant n} A_2(x'_k) = \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n^{2/3}}\right).$$

Из Следствия 2.4 работы [7] имеем неравенство

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_v^V \delta_E t_n(x'_k,u)du\right|^{2p} \leqslant (Cp)^p\,\mathbf{E}\left|\nabla\int\limits_v^V t_n(x'_k+iu)\,du\right|^{2p}.$$

Принимая во внимание этот факт можно показать, что найдется положительная константа C такая, что для всех $p\geqslant 1$, и $0\leqslant k\leqslant n$, имеет место неравенство

$$\mathbf{E}\left|\int\limits_v^V \delta_E t_n(x'_k,u)du\right|^{2p} \leqslant \frac{(Cp)^p}{n^{2p}v^p}.$$

Введем события

$$\Omega_k=\left\{\left|\int\limits_v^V \delta_E t_n(x'_k,u)du\right|\leqslant \frac{\ln n}{n\sqrt{v}}\right\}.$$

Несложно убедиться, что для любых $0\leqslant k\leqslant n$, $q\geqslant 1$, и достаточно больших n, выполнено неравенство

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\Omega_k}\right\}\leqslant n^{-q}.$$

Учитывая это, имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\max_{0\leqslant k\leqslant n} A_2(x'_k) &\leqslant \mathbf{E}\max_{0\leqslant k\leqslant n}\left|\int\limits_v^V \delta_E t_n(x'_k,u)du\right| + C\frac{\ln n}{n}\\ &\leqslant \frac{\ln n}{n\sqrt{v}} + C\ln n\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}\left\{\overline{\Omega_k}\right\} + C\frac{\ln n}{n}\leqslant \frac{\ln n}{n^{2/3}}.\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Автор выражает признательность проф. А. Н. Тихомирову и проф. Ф. Гетце за постановку задачи и полезные дискуссии.

Список литературы

[1] Richard Askey and Stephen Wainger, *Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series*, Amer. J. Math. **87** (1965), 695–708.

[2] Z. D. Bai, *Methodologies in spectral analysis of large-dimensional random matrices, a review*, Statist. Sinica **9** (1999), no. 3, 611–677.

[3] F. Götze and A. Tikhomirov, *Rate of convergence to the semi-circular law*, Probab. Theory Related Fields **127** (2003), no. 2, 228–276.

[4] F. Götze and A. N. Tikhomirov, *Rate of convergence to the semi-circular law for the Gaussian unitary ensemble*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **47** (2002), no. 2, 381–387.

[5] Friedrich Götze and Alexander Tikhomirov, *The rate of convergence for spectra of GUE and LUE matrix ensembles*, Cent. Eur. J. Math. **3** (2005), no. 4, 666–704 (electronic).

[6] Madan Lal Mehta, *Random matrices*, third ed., Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), vol. 142, Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004.

[7] Gilles Pisier, *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*, Probability and analysis (Varenna, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1206, Springer, Berlin, 1986, pp. 167–241.